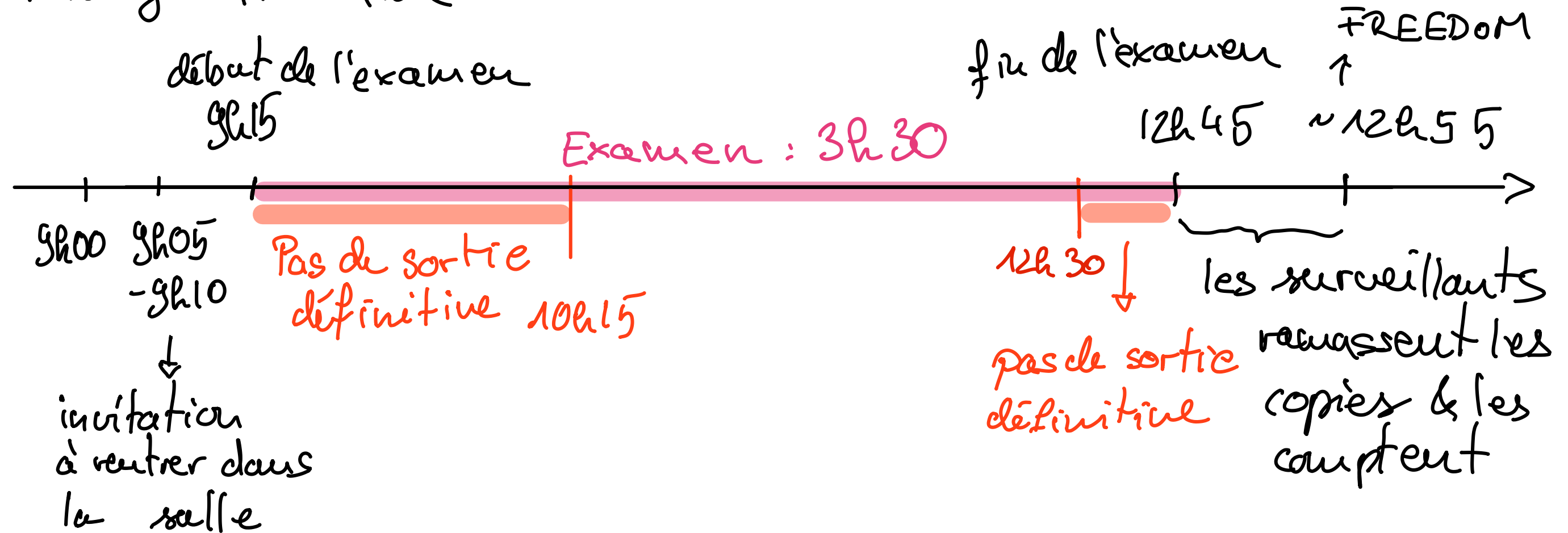


Infos:

- ◇ Ed-Discussion support reprend 3 janvier ⚠ utiliser catégories & titres descriptifs
- ◇ Ressources moodle: ExoSet / archive QCM, VF / Examens → 2017
- ◇ Rough time line



Question [QCM-serie-B] : Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) \sin\left(\frac{1}{n}\right)$. Alors

les séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ convergent.

la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, mais ne converge pas absolument.

la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

la série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ diverge.

d'Alembert
L'Hôpital,
comparaison
alternée
Exos ($f(0) = f'(0) = 0$)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\left(\sqrt{\frac{1}{x} + 2} - \sqrt{\frac{1}{x} + 1} \right) \sin(x)$$

$$\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} = \frac{n+2 - (n+1)}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \left| \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right|$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = \frac{1}{n^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n}}}$$

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$$

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}$$

$$\sin(x), \quad \sin(0) = 0, \quad \sin'(0) = \cos(0) = 1$$

$$\rightarrow a_n \sim \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^{1/2}} = \frac{1}{n^{3/2}} \quad \frac{1}{n^\alpha}, \quad \alpha = \frac{3}{2} > 1$$

$$\frac{\sin(x)}{x} \rightarrow 1$$

$$n^{3/2} \cdot a_n = n^{3/2} \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= n^1 n^{1/2} \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{3!} \frac{1}{n^3} + \dots$$

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \dots + \frac{1}{n^3} \dots$$

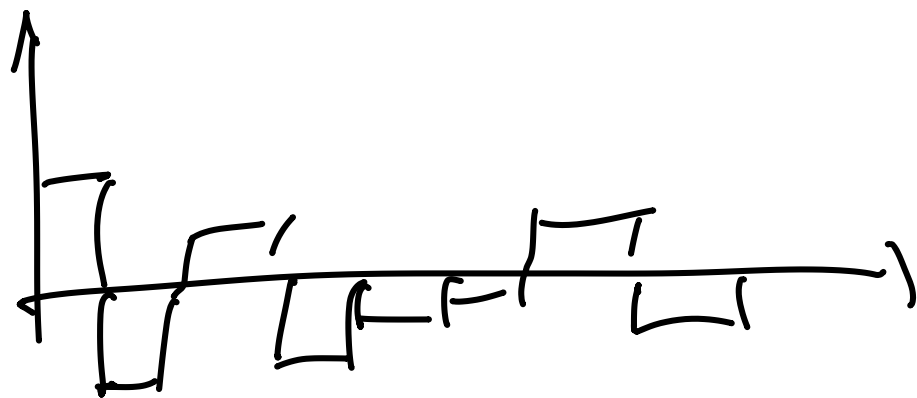
$$= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \cdot \underbrace{n \sin\left(\frac{1}{n}\right)}_{\rightarrow 1} \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_1 a_n \text{ converge.}$$

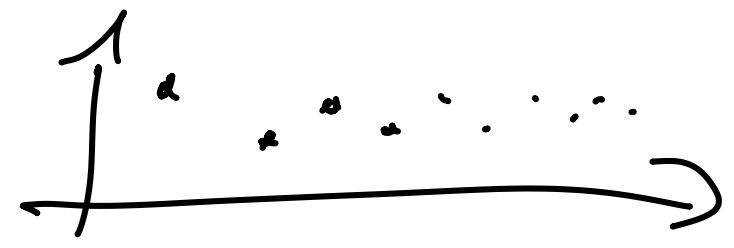
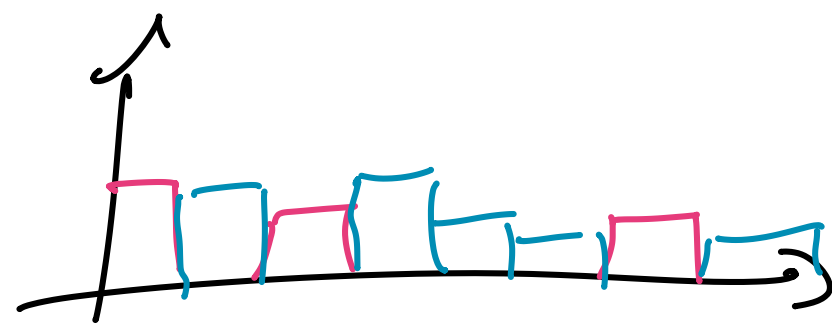
$$\sum (-1)^n a_n$$

$$\sum |(-1)^n \cdot a_n| = \sum |a_n| = \sum a_n$$

$\uparrow$
 $a_n \geq 0$



→



Question 23 : Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$. Alors il existe des nombres $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - a - bx}{x} = 0$$

☐ VRAI

☐ FAUX

→ calcul de la dérivée

→ DLs

→ TAF

→ BH

Calcul de dérivée ? $g(x) = bx$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{bh}{h}$$

?

DLs ? $f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + o(|x|)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{f(0)} + \cancel{f'(0)} \cdot x - \cancel{a} - \cancel{bx} + o(|x|)}{x} = 0$$

$$\begin{aligned} a &= f(0) \\ b &= f'(0) \end{aligned}$$

Bt: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - a - bx}{x}$

$$\frac{0}{0}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{f(x) - a}_{f(0) = a} - \cancel{bx}$ ²⁰

$$a = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0) - bx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - b}{1}$$

$$= f'(0) - b = 0 \quad b = f'(0)$$

$$g(x) = \begin{cases} f(x) - a - bx \\ 0 \end{cases}$$

si $x \neq 0$

si $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - a - bx}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x}$$

Question 24 : Si $z \in \mathbb{C}$ est tel que $|z|=1$, alors $z^5 + \frac{1}{z^5}$ est un nombre réel.



VRAI



FAUX

→ 2 sous forme polaire

$z = e^{i\theta}$ où θ est un argument de z .
 $z^5 + \frac{1}{z^5} \stackrel{?}{\in} \mathbb{R} \Leftrightarrow e^{5i\theta} + \frac{1}{e^{5i\theta}} \stackrel{?}{\in} \mathbb{R}$

$$e^{5i\theta} + e^{-5i\theta} = \overline{\cos(5\theta) + i\sin(5\theta)} + \cos(-5\theta)$$

$$= \cos(5\theta) + i\cancel{\sin(5\theta)} + \cos(5\theta) + i\sin(-5\theta) \\ = \cos(5\theta) + i\cancel{\sin(5\theta)} + \cos(5\theta) - i\cancel{\sin(5\theta)} \\ = 2\cos(5\theta) \in \mathbb{R}.$$

Question 27 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui est continue en $x_0 = 0$. Alors la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = xf(x)$ est dérivable en $x_0 = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

établir qu'une fonction est dérivable ?
 $\rightarrow$ quotient différentiel $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$

$\rightarrow$ continue déjà? en $x=0 \rightarrow$ propriétés algébriques

$\rightarrow$ 3 DL d'ordre 1.

$\rightarrow$ Fonctions usuelles

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot f(x) - 0 \cdot f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \\ &= f(0) \end{aligned}$$